සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි / All Rights Reserved]

කලාප අධ්‍යාපන කාර්යාලය, හොරණ
ZONAL EDUCATION OFFICE - HORANA

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2023
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, 2023
13 ශ්‍රේණිය-අවසාන වාර පරීක්ෂණය, 2023 නොවැම්බර්
Grade 13 –Year End Evaluation, November 2023

සංයුක්ත ගණිතය	I	10 S I
Combined Mathematics	I	

23' AL API (PAPERS GROUP)

B කොටස

*ප්‍රශ්න පහකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

11.(a) සියලු $c \in \Re$ සඳහා $f(x)=(c-1)x^2+2(c+2)x+3c$ යැයි ගනිමු.

$f(x)=0$ සමීකරණයට තාත්වික ප්‍රභින්න සෘණ, මූල දෙකක් පැවතීම සඳහා c ට පැවතිය යුතු අගය කුලකය සොයන්න.

ඉහත අගය කුලකයේ c හි උපරිම ධන නිඛිලය මගින් සාදනු ලබන වර්ගජ සමීකරණය වන $g(x)=0$ සොයන්න. එහි මූල γ සහ δ ලෙස ගනිමු.

ඒනයින් $2\gamma+\delta$ සහ $2\delta+\gamma$ මූල වන වර්ගජ සමීකරණය සොයන්න.

(b) $a,b \in \Re$ විට $P(x)=x^3-x^2+ax+b$ යැයි ගනිමු. $(x+1)$ යන්න $P(x)$ හි සාධකයක් වන අතර $P(x)$ බහු පදය $(x-1)$ න් බෙදූ විට ශේෂය -8 වේ. a හා b නියත සොයන්න.

a හා b මෙම අගය ගත්තා විට $P(x)$ යන්න ඒකජ සාධකවල ගුණිතයක් ලෙස ප්‍රකාශ කරන්න.

$P(x)=0$ හි මූල සොයන්න.

12.(a) ජාත්‍යන්තර සංස්කෘතික සංදර්ශනයක දී ශ්‍රී ලංකාව නියෝජනය කිරීමට සාමාජිකයින් 9 දෙනෙකුගෙන් යුත් කණ්ඩායමක්, නර්තන ශිල්පීන් 7 දෙනකු ගායන ශිල්පීන් 5 දෙනෙකු හා වාදන ශිල්පීන් 9 දෙනෙකු අතුරෙන් තෝරා ගත යුතුව ඇත.

i. නර්තන ශිල්පීන් 5 දෙනෙකු ගායන ශිල්පීන් එක් අයකු හා වාදන ශිල්පීන් 3 දෙනෙකු,

ii. ඉහත එක් එක් ශිල්පීන්ගෙන් යටත් පිරිසෙන් සාමාජිකයින් 2 දෙනෙකු,

කණ්ඩායමට ඇතුළත් කළ යුතු නම්, කණ්ඩායම තෝරා ගත හැකි වෙනස් ආකාර ගණන සොයන්න.

මෙම කණ්ඩායම නර්තන ශිල්පීන් 5 දෙනෙකුගෙන් හා වාදන ශිල්පීන් 4 දෙනෙකුගෙන් පමණක් සමන්විත යැයි ද, කණ්ඩායමේ නායකයා නර්තන ශිල්පියකු යැයි ද සිතමු. නායකයා මැද වාඩි වන අතර නර්තන ශිල්පීන් කිසිවකු එකිනෙකා ළඟවත් වාදන ශිල්පීන් කිසිවකු එකිනෙකා ළඟවත් වාඩි නොවේ නම්, මෙම කණ්ඩායමේ සාමාජිකයින්ට සමරු ඡායාරූපයකට පෙනී සිටීම සඳහා පෙළකට වාඩි විය හැකි වෙනස් ආකාර ගණන සොයන්න.

(b) $r \in Z^+$ සඳහා $U_r = \dfrac{3r+1}{(r+1)(r+2)(r+3)}$ සහ $f(r) = \dfrac{A}{(r+1)} + \dfrac{B}{(r+2)}$ යැයි ගනිමු.

මෙහි $A, B \in \Re$ වේ.

$r \in Z^+$ සඳහා $U_r = f(r) - f(r+1)$ වන පරිදි A හා B අගයන් සොයන්න.

ඒ නයින්, $n \in Z^+$ සඳහා $\sum_{r=1}^{n} U_r = \dfrac{5}{6} - \dfrac{(3n+5)}{(n+2)(n+3)}$ බව පෙන්වන්න.

$\sum_{r=1}^{\infty} u_r$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව පෙන්වා එහි ඓක්‍යය සොයන්න.

දැන්, $r \in Z^+$ සඳහා $W_r = U_{2r-1} + U_{2r}$ යැයි ගනිමු. $\sum_{r=1}^{n} W_r = \dfrac{5}{6} - \dfrac{(6n+5)}{2(n+1)(2n+3)}$ බව පෙන්වන්න.

$\sum_{r=1}^{\infty} W_r$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව අපෝහනය කර එහි ඓක්‍යය සොයන්න.

23' AL API (PAPERS GROUP)

13.(a) $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ සහ $f(x) = x^2 - 3x + 2$ යැයි ගනිමු. $f(A) = 0$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, A^{-1} සොයන්න.

$f(x)=0$ හි මූල λ හා $\mu\,(<\lambda)$ නම් λ හා μ සොයන්න.

$u = \begin{pmatrix} a \\ a+5 \end{pmatrix}$ හා $v = \begin{pmatrix} b-4 \\ b \end{pmatrix}$ යැයි ගනිමු. $Au = \lambda u$ හා $Av = \mu v$ ලෙස දී ඇත්නම්, a හා b හි අගයන් සොයන්න.

තවද, $B = \begin{pmatrix} a & b-4 \\ a+5 & b \end{pmatrix}$ හා $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ ලෙස දී ඇත්නම් $B = A^{-1}BD$ බව සත්‍යාපනය කරන්න.

(b) ආගන්ඩ් සටහනෙහි A ලක්ෂ්‍යයෙන් z_0 සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව නිරූපණය කරයි. $2iz_0$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යය B ලෙස ගෙන $A\hat{O}B = \dfrac{\pi}{2}$ බව පෙන්වන්න.

C ලක්ෂ්‍යයෙන් $(1+2i)z_0$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව නිරූපණය කරයි නම් C ලක්ෂ්‍යය සඳහා ජ්‍යාමිතික නිර්මාණය දෙන්න. $A\hat{O}C$ සොයන්න.

z_0^2 සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යය OC මත පිහිටයි නම් $Arg(z_0) = \tan^{-1}(2)$ බව අපෝහනය කරන්න.

(c) $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ යැයි ගනිමු. මෙහි $r \in \Re^+$ හා $0 \le \theta \le 2\pi$ වේ.

ද මුවාවර් ප්‍රමේය භාවිතයෙන් n ධන පූර්ණ සංඛ්‍යාවක් විට z^n සඳහා ප්‍රකාශනයක් ලියන්න.

$\omega = \cos\theta + i\sin\theta$ නම් $\dfrac{1}{\omega}$ සොයන්න. ω^n හා $\dfrac{1}{\omega^n}$ සඳහා ප්‍රකාශන ලියා දක්වන්න.

$\left(\omega + \dfrac{1}{\omega}\right)^5 = \left(\omega^5 + \dfrac{1}{\omega^5}\right) + 5\left(\omega^3 + \dfrac{1}{\omega^3}\right) + 10\left(\omega + \dfrac{1}{\omega}\right)$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින් $\cos^5\theta = \dfrac{1}{16}\cos 5\theta + \dfrac{5}{16}\cos 3\theta + \dfrac{5}{8}\cos\theta$ බව පෙන්වන්න.

14. (a) $x \neq 1$ සඳහා $f(x)=\dfrac{12(x-2)(x+1)}{(x-1)^2}$ යැයි ගනිමු.

$f(x)$ හි ව්‍යුත්පන්නය, $f'(x)$ යන්න $x \neq 1$ සඳහා, $f'(x)=\dfrac{-12(x-5)}{(x-1)^3}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

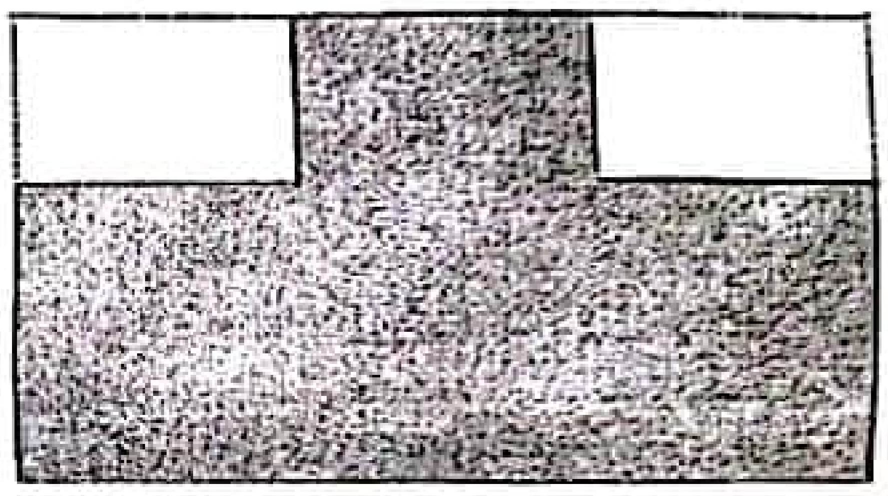
ඒ නයින්, $f(x)$ වැඩි වන ප්‍රාන්තරය හා $f(x)$ අඩු වන ප්‍රාන්තර සොයන්න.

$f(x)$ හි හැරුම් ලක්ෂයේ ඛණ්ඩාංක ද සොයන්න.

$x \neq 1$ සඳහා $f''(x)=\dfrac{24(x-7)}{(x-1)^4}$ බව දී ඇත.

ස්පර්ශෝන්මුඛ, හැරුම් ලක්ෂය සහ නතිවර්තන ලක්ෂය දක්වමින් $y=f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ රූප සටහනක් අඳින්න.

(b) යාබද රූපයේ පෙන්වා ඇති අඳුරු කළ පෙදෙසෙහි වර්ගඵලය $165m^2$ වේ. මෙම පෙදෙස ලබාගෙන ඇත්තේ දිග මීටර් $3y$ ද පළල මීටර් $5x$ ද වූ සෘජුකෝණාස්‍රයකින්, දිග මීටර් y ද පළල මීටර් $2x$ ද වූ සර්වසම සෘජුකෝණාස්‍ර දෙකක් කොන් දෙකෙන් ඉවත් කිරීමෙනි. $xy=15$ බව පෙන්වා, අඳුරු කළ පෙදෙසෙහි මීටර්වලින් මනින ලද පරිමිතිය L යන්න $x>0$ සඳහා $L=10x+\dfrac{90}{x}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න. L අවම වන පරිදි x හි අගය සොයන්න.



15. (a) සියලු $x \in \Re$ සඳහා $4x-1=A(x-2)(x^2+3)+B(x^2+3)+(Cx+D)(x-2)^2$ වන පරිදි A,B,C හා D නියත පවතින බව දී ඇත. A,B,C හා D හි අගයන් සොයන්න.

ඒ නයින් $\displaystyle\int_0^1 \frac{4x-1}{(x-2)^2(x^2+3)}dx=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\pi}{3\sqrt{3}}\right)$ බව පෙන්වන්න.

(b) සුදුසු ආදේශයක් භාවිතයෙන් $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{2+\cos x}$ අගයන්න.

$\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x+2\sin x}{2+\cos x}dx$ හි අගය අපෝහනය කරන්න.

23' AL API (PAPERS G

(c) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන් $\int x\cos x\sin 2x\,dx$ සොයන්න.

(d) a නියතයක් වන $\displaystyle\int_0^a f(x)dx=\int_0^a f(a-x)dx$ ප්‍රතිඵලය භාවිතයෙන්,

$\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^3 x}{\sin x+\cos x}dx=\frac{\pi-1}{4}$ බව පෙන්වන්න.

16. (x_0, y_0) ලක්ෂ්‍යය හරහා යන, $ax + by + c = 0$ සරල රේඛාවට ලම්බකව අඳින ලද සරල රේඛාව මත ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක ඛණ්ඩාංක $(x_0 + at, y_0 + bt)$ ආකාරයෙන් දැක්විය හැකි බව පෙන්වන්න. මෙහි t යනු විචල්‍ය පරාමිතියකි.

ඒ නයින් $l_{AC} \equiv 3x - y + 2 = 0$ සරල රේඛාවට ලම්බක සරල රේඛාවක් මත $B \equiv (3,1)$ ලක්ෂ්‍යය පිහිටයි නම් එම සරල රේඛාව මත වූ D ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක පරාමිතියක් ඇසුරින් සොයන්න.

දැන් A, B, C, D ලක්ෂ්‍ය රොම්බසයක ශීර්ෂවල පිහිටයි නම් D ලක්ෂ්‍යයට අනුරූප පරාමිතිය සොයා D හි ඛණ්ඩාංක ලියන්න.

$l_{CD} \equiv x + ky + 6 = 0$ යැයි ගනිමු. මෙහි $k \in \Re$ වේ. k හි අගය සොයන්න.

$ABCD$ රොම්බසයේ විකර්ණ ඡේදන ලක්ෂ්‍යය E යැයි ගනිමු. කේන්ද්‍රය E වූ CD හා CB පාද ස්පර්ශ කරන $S_1 = 0$ වෘත්තයේ සමීකරණය සොයන්න.

EC මත කේන්ද්‍රය පිහිටි $S_1 = 0$ වෘත්තය බාහිරව ස්පර්ශ කරන C සිට ඇඳි CD හා CB පාද පොදු ස්පර්ශක වූ වෘත්තයේ සමීකරණය සොයන්න.

23' AL API (PAPERS GROUP)

17. (a) $\cos A, \cos B, \sin A$ හා $\sin B$ ඇසුරෙන් $\cos(A+B)$ ලියා දක්වන්න.

ඒ නයින් $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ බව අපෝහනය කරන්න.

$2\cos^2\theta - 2\cos^2 2\theta \equiv \cos 2\theta - \cos 4\theta$ සර්වසාම්‍යය සත්‍යාපනය කර

ඒ නයින් $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{1}{2}$ බව පෙන්වන්න.

$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ බව අපෝහනය කර, $\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$ හි අගය සොයන්න.

(b) සුපුරුදු අංකනයෙන්, ඕනෑම ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සයින් නීතිය ප්‍රකාශ කරන්න.

ABC සෘජු කෝණී ත්‍රිකෝණයේ $A\hat{B}C = \frac{\pi}{2}$ වේ. O යනු $A\hat{O}B = B\hat{O}C = C\hat{O}A = \frac{2\pi}{3}$ වන පරිදි ABC ත්‍රිකෝණය තුළ පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක් යැයි ගනිමු. $C\hat{B}O = \theta$ වේ. BOC ත්‍රිකෝණය සඳහා සයින් නීතිය යෙදීමෙන් $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)}{BO} = \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)}{a}$ බව පෙන්වන්න.

AOB ත්‍රිකෝණය සඳහා සයින් නීතිය යෙදීමෙන් BO සඳහා එවැනිම සම්බන්ධයක් ලබා ගන්න.

ඒ නයින් $\tan\theta = \frac{\sqrt{3}a + c}{\sqrt{3}c + a}$ බව පෙන්වන්න.

(c) $\tan^{-1}(x) + \tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{\pi}{2}$ සමීකරණය විසඳන්න.

***